**Izolarea rădăcinilor unui polinom utilizând secvența sturm.**

De

Todireanu Valentin George

**Introducere**

Cea mai populară teoremă a lui Sturm apare in 1829 și rezolvă problema găsirii numărului de rădacini reale a unui polinom f(x) = 0, pe un interval dat, să spunem ]a,b[. Utilizând aceasta teoremă Sturm a reușit să izoleze rădacinile reale ale polinomului f(x).De asemenea a reușit sa găseasca intervale deschise astfel încât fiecare interval conține o rădăcină reală și fiecare rădăcină reală este cuprinsă intr-un interval.

**Izolarea rădăcinilor unui polinom utilizând diferite metode.**

**Pentru izolarea rădăcinilor unui polinom există următoarele metode:**

**1. Regula semnului a lui Descartes** spune că diferența dintre numărul de schimbări de semn in secvența coeficienților unui polinom și numărul de rădăcini reale pozitive este intreg par pozitiv.

Din aceasta rezultă că dacă numărul de schimbări de semn este zero , atunci polinomul nu are rădăcini reale pozitive, și, dacă numărul este 1, atunci polinomuil are o singură rădăcină reală pozitiva, care este o rădăcină singulară.

**2. Teorema lui Vincent** oferă o modalitate pentru izolarea rădăcinilor reale,care stă la baza celui mai eficient algoritm pentru izolarea rădăcinilor reale.

**3. Metoda fracției continue.** Utilizarea fracțiilor continue pentru izolarea rădăcinilor reale a fost folosită pentru prima dată de catre Vincent.

**4. Metoda bisecției.**  Această metodă constă in mare parte prin inceperea de la un interval care conține toate rădăcinile reale ale unui polinom, și impărțindu-l recursiv in două părți până când intervalele respective conțin zero sau o rădăcină.

**Secvența Sturm**

Secvența sturm**:**

Fie f(x) = 0 un polinom de gradul n, cu coeficienti raționali si rădăcini multiple.

Secvența sturm pentru polinomul f(x) este :

Sseq(x) = {f(x),f′ (x),r1(x),r2(x),... ,rk(x)}, unde f ′ (x) este prima derivată a lui f(x) și polinoamele

ri(x), 1 ≤ i ≤ k ≤ n−1, sunt negațiile resturilor obținute prin aplicarea algoritmului Euclidian gcd

pe f(x) și f ′ (x). Așadar, avem:

f(x) = f ′ (x)q1(x) − r1(x)

f ′ (x) = r1(x)q2(x) − r2(x)

. . .

rk−2 = rk−1qk(x) − rk(x)

Unde k = n−1, care este, atunci cand nu lipsește niciun termen, secvența Sturm se numește completă,iar când k < n − 1,se numește incompletă.

**Izolarea rădăcinilor utilizând secvența sturm**

**Utilizăm secvența sturm pentru izolarea rădăcinilor pentru că putem izola rădăcinile polinomului fără a calcula rădacinile.**

Fie f(x) = 0 un polinom de gradul n, cu coeficienti raționali si rădăcini multiple.

Atunci numarul de rădacini reale in intervalul deschis ]a,b[ satisface egalitatea = va-vb, unde va,vb este numărul de schimbări de semn in secvența Sseq(a) si Sseq(b), respectiv.

Pentru această teoremă Sturm este foarte recunoscut și dovezile sunt găsite in aproape fiecare carte despre Analiza Numerelor.

Pentru a izola rădăcinile reale ale polinomului f(x) Sturm a sugerat să izolăm prima dată rădăcinile pozitive iar după cele negative ( înlocuind x cu –x in polinomul f(x)) și să verificăm dacă 0 este rădăcină.

Așadar pentru a realiza izolarea rădăcinilor pozitive trebuie să:

1-Să calculăm secvența Sturm Sseq(x)

2-Să calculăm o limită superioara ub pentru rădăcinile positive ale polinomului f(x)

3-Să impărțim in două ]a,b[ cu ]0,ub[ până când izolarea s-a terminat

**Concluzie**

Acest proces de izolare poate fi folosit prin orice metodă pentru calculul numărului de rădăcini reale intr-un interval. Prin analiză teoretică complexă și prin demonstrații practice s-a dovedit că metode bazate pe regula semnului lui Descartes sunt mult mai eficiente, urmând ca, în zilele noastre secvența Sturm să fie rareori folosită pentru izolarea rădăcinilor.

**Bibliografie**

[1] Alkiviadis G. Akritas and Panagiotis S. Vigklas Dedicated to the memory of Laurent¸iu Panaitopol (1940-2008) on the occasion of his 70th anniversary <https://pdfs.semanticscholar.org/835e/1c5e9ac182d2735da4e92a81f57cc53b63f4.pdf>

[2] <http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/ca/notes04.pdf>

[3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%27s_theorem>

[4] <https://en.wikipedia.org/wiki/Real-root_isolation>